Code No: 5094/R19

FACULTY OF SCIENCE

B.Sc. (CBCS) II-Year (IV-Semester) Regular & Backlog Examinations, June/July-2023

Mathematics-IV

(Algebra)

Time: 3 Hours Max Marks: 80

SECTION-A (4x5=20 Marks)

Answer any Four questions from the following

ఈక్రిందివానిలో ఏవేని నాలుగు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి

1. Define a Group and prove that in a group G, there is only one identity element.
సమూహంను నిర్వచించండి మరియు సమూహం G లో తత్సమ మూలకం ఏకైకం అని నిరూపించండి.

2. Write the permutation $(13256)(23)(46512)$ as product of disjoint cycles.
$(13256)(23)(46512)$ అనే ప్రస్తారాన్ని వియుక్త చక్రియల లబ్దంగా వ్రాయండి.

3. Define a Ring and let a belong to a ring R. Then prove that $a0 = 0a = 0$.
వలయంను నిర్వచించండి మరియు వలయం R లో a తీసుకొనినచో $a0 = 0a = 0$ అని నిరూపించండి.

4. Let $R = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ and I be subset of R consisting of matrices with even entries. Show that I is an ideal of R.
$R = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ ను తీసుకోండి. R కు I సరి ఎంట్రీలు కల మాత్రికలు ఉన్నటువంటి ఉపసమితి అయితే I ను R కు ఆదర్శం అనిచూపండి.

5. Find the generators of Z_{10}.
Z_{10} యొక్క జనక మూలకాలను కనుక్కోండి.

6. List all zero divisors of $(Z_{20}, +_{20}, \times_{20})$.
$(Z_{20}, +_{20}, \times_{20})$ యొక్క శూన్యభాజకాల జావితాను తెలుపండి.

SECTION-B (4x15=60 Marks)

Answer all the following questions

ఈక్రింది అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయుము

7. (a) Define a Subgroup. Let G be a group and H a nonempty subset of G. If $ab^{-1} \in H$ whenever a and b are in H, then prove that H is a subgroup of G.
ఉపసమూహంను నిర్వచించండి. ఒక సమూహం G ను తీసుకోండి మరియు H, G కి శూన్యేతర ఉపసమితి. a మరియు b లు H లో ఉన్నప్పుడల్లా $ab^{-1} \in H$ అయితే H, G కి ఉపసమూహం అని నిరూపించండి.

(OR) / లేదా

(b) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.
చక్రియ సమూహం యొక్క ప్రతీ ఉపసమూహం చక్రీయం అని నిరూపించండి.

8. (a) Suppose ϕ is an isomorphism from a group G onto a group $\overline{G}$ then prove that
ϕ అనేది సమూహం G నుండి సమూహం $\overline{G}$ కు తుల్యరూపత అయితే

(i) ϕ carries identity element of G to the identity element of $\overline{G}$.
ϕ, G లోని తత్సమ మూలకం $\overline{G}$ లోని తత్సమ మూలకానికి చేరవేస్తుంది.

(ii) For every integer n and for every group element a in G, $\phi(a^n) = \phi(a)^n$.
ప్రతీ పూర్ణసంఖ్య n మరియు G లోని ప్రతీసమూహ మూలకం a కి $\phi(a^n) = \phi(a)^n$ అని నిరూపించండి.

Contd....2

(OR) / లేదా

(b) State and prove Lagrange's theorem. Using this theorem, prove that a group of prime order is cyclic.
లెగ్రాంజి సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి. ఈ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి అభాజ్య తరగతి గల ప్రతీ సమూహం చక్రీయం అని నిరూపించండి.

9. (a) Let ϕ be a group homomorphism from G to $\overline{G}$. Then prove that $\dfrac{G}{\ker\phi} \approx \phi(G)$.

ϕ అనేది G నుంచి $\overline{G}$ కి సమూహ సమరూపతగా తీసుకుంటే $\dfrac{G}{\ker\phi} \approx \phi(G)$ అని నిరూపించండి.

(OR) / లేదా

(b) Prove that characteristic of an integral domain is either 0 or prime. Find the characteristic of a ring $(R, +_{12}, \times_{12})$ where $R = \{0,3,6,9\}$.
పూర్ణాంక ప్రదేశం యొక్క లాక్షణికాన్ని 0 లేదా అభాజ్యం అని నిరూపించండి. వలయం $(R, +_{12}, \times_{12})$ యొక్క లాక్షణికాన్ని కనుక్కోండి. ఇక్కడ $R = \{0,3,6,9\}$.

10. (a) Let R be a commutative ring with unity and A be an ideal of R then prove that $\dfrac{R}{A}$ is field if and only if A is maximal ideal.

R అనేది ఒక తత్సమ సహిత వినిమయ వలయం మరియు A, R కు ఆదర్శం అయితే $\dfrac{R}{A}$ క్షేత్రం $\Leftrightarrow A$ గరిష్ట ఆదర్శం అని నిరూపించండి.

(OR) / లేదా

(b) Define homomorphism of rings and kernel. Show that if $\phi : R \to S$ be a ring homomorphism, then $\ker\phi$ is an ideal of R.
వలయ సమరూపతను, అంతస్థంను నిర్వచించండి. $\phi : R \to S$ వలయ సమరూపత అయితే $\ker\phi$ అనేది R కు ఆదర్శం అవుతుందని చూపండి.